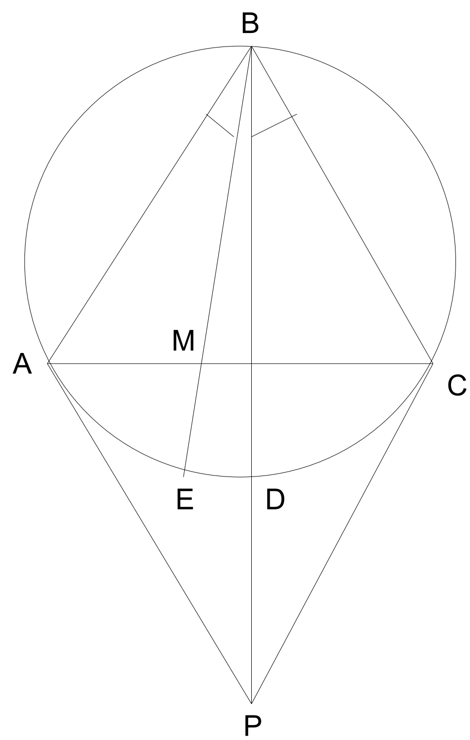
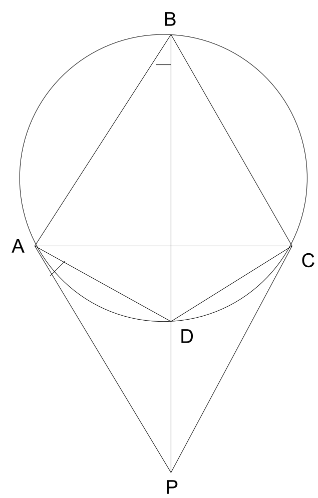
Лемма о касательных и симедиане.

Дан $\triangle ABC$, вписанный в окружность. В точках A и C к окружности проведены касательные, пересекающиеся в точке P. BM – медиана треугольника. Тогда $\angle ABM = \angle CBP$, т.е. BP является симедианой.



Доказательство.

Пусть ВМ пересекает окружность в точке $E \neq B$, а ВР пересекает окружность в точке $D \neq B$.
1) Докажем, что $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$:



$\angle PAD = \angle ABP$ (угол между хордой и касательной), а значит $\triangle PAD \sim \triangle PBA$ по двум углам. А значит

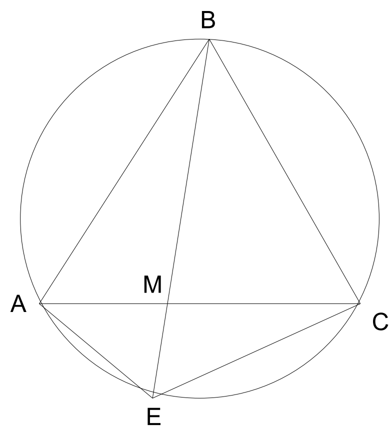
$$\frac{AD}{BA} = \frac{PA}{PB} \tag{1}$$

Аналогично $\triangle PCD \sim \triangle PBC \Rightarrow$

$$\frac{CD}{BC} = \frac{PC}{PB} \tag{2}$$

Поделив (1) на (2) с учётом $PA = PC$ имеем: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, ч.т.д.

2) Докажем, что $\frac{AE}{EC} = \frac{BC}{AB}$:



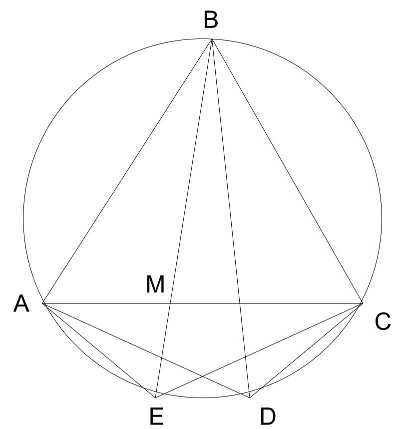
$\triangle AME \sim \triangle BMC$ по двум углам:

$$\frac{AE}{BC} = \frac{AM}{MB} \tag{3}$$

Аналочигно $\triangle CME \sim \triangle BMA$ по двум углам:

$$\frac{CE}{BA} = \frac{CM}{MB} \tag{4}$$

Поделив (3) на (4) с учётом $MA = MC$ имеем: $\frac{AE}{EC} = \frac{BC}{AB}$, ч.т.д.



3) Теперь из 1) и 2) имеем $\frac{AD}{DC} = \frac{CE}{EA}$, а значит $\triangle AEC \sim \triangle CDA$ по двум сторонам и углу между ними. Но тогда

$$\frac{AE}{CD} = \frac{AC}{CA} = 1 \Rightarrow$$

$$AE = CD \Rightarrow \angle ABE = \angle CBD,$$

Лемма доказана.