Задача 1

Дано целое число р. Известно, что р даёт остаток 7 при делении на 8. Доказать, что сумма квадратичных вычетов[1], больших нуля, но меньших $\frac{p}{2}$, равна $\frac{p^2-1}{16}$.

Решение

Лемма: для любого $x \in \mathbb{R}$ верно равенство:

$$\left\{x - \frac{1}{2}\right\} = \{2x\} - \{x\} + \frac{1}{2},$$

где $\{x\}$ обозначает дробную часть числа х.
Доказательство: Пусть $x = n + \alpha$, где $n = [x]$, $\alpha = \{x\}$, т.е. $0 \le \alpha < 1$, $n \in \mathbb{Z}$.
1) $\alpha < \frac{1}{2} : \left\{x - \frac{1}{2}\right\} = \left\{x + \frac{1}{2}\right\} = \left\{n + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\right\} = \alpha + \frac{1}{2}$, т.к. $0 \le \alpha + \frac{1}{2} < 1$. $\{2x\} = \{2n + 2\alpha\} = 2\alpha$, т.к. $0 \le 2\alpha < 1$, т.е. $\left\{x - \frac{1}{2}\right\} = \alpha + \frac{1}{2} = 2\alpha - \alpha + \frac{1}{2} = \{2x\} - \{x\} + \frac{1}{2}$, ч.т.д.
2) $\alpha \ge \frac{1}{2} : \left\{x - \frac{1}{2}\right\} = \left\{n + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\right\} = \alpha - \frac{1}{2}$,
т.к. $0 \le \alpha - \frac{1}{2} < \alpha < 1; \{2x\} = \{2n + 1 + (2\alpha - 1)\} = 2\alpha - 1$, т.к. $0 \le 2\alpha - 1 < 2 - 1 = 1$, т.е. $\left\{x - \frac{1}{2}\right\} = \alpha - \frac{1}{2} = 2\alpha - 1 - \alpha + \frac{1}{2} = \{2x\} - \{x\} + \frac{1}{2}$, ч.т.д.

Перейдём к основной задаче. Сумма всех целых чисел, больших 0, но меньших $\frac{p}{2}$ равна

$$S = 1 + 2 + ... + \frac{p-1}{2} = \frac{\frac{p-1}{2} \cdot \left(\frac{p-1}{2} + 1\right)}{2} = \frac{p^2 - 1}{8}$$

Нам надо доказать, что сумма квадратичных вычетов равна половине этой суммы или, что то же, доказать, что сумма квадратичных вычетов равна сумме квадратичных невычетов. Запишем это с помощью символа Лежандра:

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} i \left(\frac{i}{p}\right) = 0$$

Заметим, что $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1$, т.к. $p = 8k_1 - 1$. ($k_1 \in \mathbb{N}$).

[1]Число a, не кратное р, называется квадратичным вычетом, если найдётся такое целое х, что $a - x^2$ делится на р.

Значит $-x \cdot \left(\frac{-x}{p}\right) = -x \cdot \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot \left(\frac{x}{p}\right) = x \cdot \left(\frac{x}{p}\right)$. Имеем:

$$T = \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} i\left(\frac{i}{p}\right) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=-\frac{p-1}{2} \\ i\neq 0}}^{\frac{p-1}{2}} i\left(\frac{i}{p}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{\substack{-\frac{p}{2}<i<\frac{p}{2} \\ i\neq 0}} i\left(\frac{i}{p}\right) + \overbrace{\sum_{\substack{-\frac{p}{2}<i<\frac{p}{2} \\ i\neq 0}} i}^{0} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{-\frac{p}{2}<i<\frac{p}{2} \\ i\neq 0}} i \cdot \left(\left(\frac{i}{p}\right)+1\right) = \sum_{\substack{-\frac{p}{2}<i<\frac{p}{2} \\ i\neq 0 \\ i - \text{кв. вычет}}} i,$$

т.к.

$$\left(\frac{i}{p}\right)+1 = \begin{cases} 2, \text{ если } i \ - \ \text{квадратичный вычет} \\ 0, \text{ если } i \ - \ \text{квадратичный невычет} \end{cases}$$

Пусть $r_k \equiv k^2 \,(mod\, p)$, $-\frac{p}{2} < r_k < \frac{p}{2}$, $k = \overline{1, \frac{p-1}{2}}$. Очевидно, что числа r_k – квадратичные вычеты. Предположим, что среди них есть равные: $r_m = r_n$, $m < n$. Тогда $m^2 \equiv n^2 \,(mod\, p) \Rightarrow (m-n)(m+n) \equiv 0 \,(mod\, p) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m \equiv n \,(mod\, p) \\ m+n \,\vdots\, p \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = n. \text{ Противоречие.} \\ m+n \,\vdots\, p, \text{ но } 0 < m+n < p, \text{ т.е. } m+n \not\vdots\, p. \text{ Противоречие.} \end{array} \right.$$

Значит $r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{p-1}{2}}$ – полный набор квадратичных вычетов, больших $-\frac{p}{2}$, но меньших $\frac{p}{2}$, т.е.

$$T = \sum_{\substack{-\frac{p}{2}<i<\frac{p}{2} \\ i\neq 0 \\ i - \text{кв. вычет}}} i = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} r_k.$$

Теперь

$$0 < \frac{r_k}{p}+\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \frac{r_k}{p}+\frac{1}{2} = \left\{\frac{r_k}{p}+\frac{1}{2}\right\} = \left\{\frac{k^2}{p}+\frac{1}{2}\right\} = \left\{\frac{k^2}{p}-\frac{1}{2}\right\} = \left\{\frac{2k^2}{p}\right\} - \left\{\frac{k^2}{p}\right\} + \frac{1}{2}$$

по лемме. Значит $\frac{r_k}{p} = \left\{\frac{2k^2}{p}\right\} - \left\{\frac{k^2}{p}\right\} \Rightarrow r_k = p\left\{\frac{2k^2}{p}\right\} - p\left\{\frac{k^2}{p}\right\}$. Т.к. $p = 8k_1 - 1$, то $p^2 = 64k_1^2 - 16k_1 + 1 \equiv 1 \,(mod\, 16)$, т.е. $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = 1$.

Пусть $k^2 \equiv a_k \,(mod\, p)$, $0 < a_k < p$, $k = \overline{1,\, \frac{p-1}{2}}$. Тогда $p\left\{\frac{k^2}{p}\right\} = p \cdot \frac{a_k}{p} = a_k$. Пусть $2k^2 \equiv b_k \,(mod\, p)$, $0 < b_k < p$, $k = \overline{1,\, \frac{p-1}{2}}$. Тогда $p\left\{\frac{k^2}{p}\right\} = p \cdot \frac{b_k}{p} = b_k$. $\left(\frac{b_k}{p}\right) = \left(\frac{2k^2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) = 1$; $\left(\frac{a_k}{p}\right) = \left(\frac{k^2}{p}\right) = 1$, т.е. a_k и b_k – квадратичные вычеты. Аналогично с r_k, доказываем, что наборы a_k и b_k – полные наборы квадратичных вычетов.(Если $a_m = a_n$, то $m^2 \equiv n^2 \,(mod p) \Rightarrow m \equiv n \,(mod p)$ или $\Rightarrow m \equiv -n \,(mod p) \Rightarrow m = n$ или $m+n \,\vdots\, p$, но $0 < m+n < p$.). Значит $\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} b_k = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} a_k$, т.е.

$$T = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} r_k = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (b_k - a_k) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} b_k - \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} a_k = 0, \text{ ч.т.д}$$

Задача 2

a) Докажите неравенство:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + 1\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + 1\right) \geq 2(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \tag{1}$$

b) Докажите неравенство:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ki}^n + 1\right) \geq \frac{n}{(n-1)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ik}\right) \tag{2}$$

Решение

Докажем только b), т.к. а) из него следует.
Лемма 1:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^n \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^n}{n^{n-1}} \tag{3}$$

Доказательство: Данное неравенство есть следствие неравенства о средних степенных:

$$\sqrt[n]{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^n}{n}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

Лемма 2 (Неравенство Гёльдера):

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{n}x_{ki}\leq\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ki}^{n}} \tag{4}$$

Доказательсво: Т.к. неравенство однородное, то без ограничения общности можем считать, что

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ki}^{n}=1,\ k=\overline{1,n}$$

Но тогда $\prod_{k=1}^{n}x_{ki}\leq\frac{\sum_{k=1}^{n}x_{ki}^{n}}{n}$ по неравенству Коши. Значит

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{n}x_{ki}\leq\frac{n}{n}=1=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ki}^{n}},\text{ ч.т.д.}$$

Теперь по неравенству 3 получаем:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{ki}^{n}+1\right)\geq\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{y_k^n}{n^{n-1}}+1\right),$$

где $y_k=\sum_{i=1}^{n}x_{ki}$. Далее:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{y_k^n}{n^{n-1}}+1\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(\underbrace{\frac{1}{n-1}+\ldots}_{k-1}+\frac{y_k^n}{n^{n-1}}+\underbrace{\ldots+\frac{1}{n-1}}_{n-k}\right)\geq\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{\sqrt[n]{n^{n-1}(n-1)^{n-1}}}\right)^n$$

по неравенству 4. И, наконец,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{\sqrt[n]{n^{n-1}(n-1)^{n-1}}}\right)^n=\frac{1}{n^{n-1}(n-1)^{n-1}}\left(\sum_{k=1}^{n}y_k\right)^n\geq$$

$$\geq\frac{n^n}{n^{n-1}(n-1)^{n-1}}\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{ik}\right)$$

по неравенству Коши, ч.т.д.

Задача 3

Найти все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые для любых x, y удовлетворяют неравенству:

$$(f(x+y))^2 + (x+y)^2 \leq (x+y)\left(f(x+y) + f(x) + f(y)\right) \tag{5}$$

Решение

Положим $x = y = 0$:

$$(f(0))^2 \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0.$$

Положим теперь $y = 0$:

$$(f(x))^2 + x^2 \leq x \cdot 2f(x) \Rightarrow (f(x) - x)^2 \leq 0 \Rightarrow f(x) = x.$$

Итак, $f(x) = x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Проверка очевидна.
Ответ: $f(x) = x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Задача 4

Пусть $a, b, c \geq 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите неравенство:

$$\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3abc\right) \geq 18a^2b^2c^2. \tag{6}$$

Доказательство

Лемма:

$$(xy + yz + zx)^2 \geq 3(x + y + z)xyz, \ \forall x, y, z \geq 0 \tag{7}$$

Доказательство: Раскроем скобки:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xy^2z + 2x^2yz + 2xyz^2 \geq 3xy^2z + 3x^2yz + 3xyz^2$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xy^2z + x^2yz + xyz^2$$

Последнее неравенство есть неравенство трёх квадратов для xy yz и zx, ч.т.д.
Введём обозначения: $s = a^2 + b^2 + c^2 = 3$, $t = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$, $p = a^2b^2c^2$.
Теперь, положив в лемме $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$, перепишем неравенство 7 в виде:

$$t^2 \geq 3sp \Rightarrow t \geq 3\sqrt{p}, \text{ т.к. } s = 3. \tag{8}$$

Требуемое неравенство перепишется в виде

$$t\,(t + 3\sqrt{p}) \geq 18p \tag{9}$$

По лемме (неравенство 8) имеем:

$$t\,(t + 3\sqrt{p}) = t^2 + 3t\sqrt{p} \geq 9p + 9p = 18p, \text{ ч.т.д.} \tag{10}$$